PHYSICS EXPERIMENT

Oscilaciones acopladas

REGISTRO Y ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES DE DOS PÉNDULOS IDÉNTICOS Y ACOPLADOS.

- Registro de la oscilación equifásica y determinación de su frecuencia de oscilación T_+.
- Registro de la oscilación en oposición de fase y determinación de su frecuencia de oscilación T_-.
- Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos y determinación del período de oscilación T así como el período de los batidos T_Δ.
- Comparación de los períodos de los batidos y de la oscilación con los valores calculados a partir de las oscilaciones propias T- y T+.
- Determinación de la constante del muelle de acoplamiento.

UE105060

04/07 CW

FUNDAMENTOS GENERALES

En la oscilación de dos péndulos acoplados, la energía se transmite entre los dos péndulos en ambas direcciones. Si los péndulos son iguales y se excitan a una oscilación de tal forma que al principio uno de los péndulos se encuentre en su posición de reposo, la transmisión de la energía es total. Esto significa que un péndulo llega por completo al estado de reposo mientras el otro oscila con máxima amplitud. El tiempo transcurrido entre dos estados de reposo de un péndulo o, en general, entre dos instantes diferentes en los que el péndulo oscila con amplitud mínima, se denomina frecuencia de batido T_Δ.

Las oscilaciones de dos péndulos matemáticos idénticos y acoplados se pueden describir como superposiciones de dos oscilaciones propias. Es posible observar estas oscilaciones propias si se provoca la oscilación de ambos péndulos en fases iguales u opuestas. En el primer caso, los péndulos oscilan sin influencia del acoplamiento, con frecuencia de péndulo desacoplado; en el segundo caso, oscilan con la máxima influencia del acoplamiento y la mayor frecuencia propia. Todas las demás oscilaciones son representables como superposiciones de estas dos oscilaciones propias.

Las ecuaciones de movimiento de los péndulos indican (para desviaciones pequeñas φ_1 y φ_2) lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\
L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

g: aceleración de caída, L: longitud del péndulo, k: constante de acoplamiento

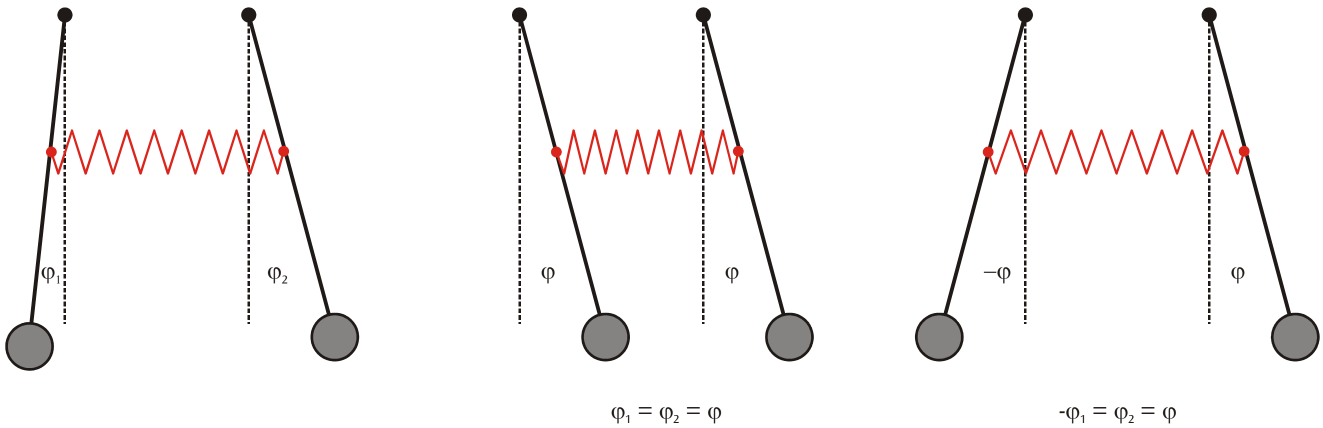

Fig. 1: Izquierda: oscilación acoplada general; centro: oscilación acoplada equifásica; derecha: oscilación acoplada en oposición de fase

Para las variables auxiliares (introducidas, en primer lugar, arbitrariamente) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ y $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ = 0$$
$$L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- = 0 \tag{2}$$

Cuyas resoluciones

$$\varphi_+ = a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \tag{3}$$

corresponden a las frecuencias circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ y } \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \tag{4}$$

de las oscilaciones propias descritas con excitación equifásica o en oposición de fase (es válido $\varphi_+ = 0$ en el caso de equifase y $\varphi_- = 0$ para oscilación en oposición de fase).

Las desviaciones de los péndulos se pueden calcular a partir de la suma o la diferencia de ambas variables auxiliares, con lo que se obtiene la solución

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)\right) \tag{5}$$

Aquí, los parámetros a_+, a_-, b_+ y b_- son, en primer lugar, variables arbitrarias, que se pueden calcular a partir del estado de oscilación de ambos péndulos en el instante en que $t = 0$.

El más sencillo de interpretar es el siguiente caso, que se excita cuando el pendulo 1, en el momento 0 se desvía un ángulo φ_0 de su posición de reposo y se deja libre, mientras el péndulo 2 se encuentra en su posición de reposo 0.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \tag{6}$$

Tras la transformación matemática se obtiene

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \tag{7}$$

en donde

$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \tag{8}$$

Esto corresponde a una oscilación de ambos péndulos con la misma frecuencia angular ω, en donde sus amplitudes se modulan con la frecuencia angular ω_Δ. Esta clase de modulación se denomina batido. En el presente caso se puede hablar hasta de un batido máximo, porque la amplitud logra llegar a su mínimo valor igual a cero.

LISTA DE EQUIPOS

2	Péndulo de barra con sensor angular	U8404270
1	Transformador 12 V, 2 A, por ej.	U8475430
1	Resorte helicoidal con dos ojales, 3 N/m	U15027
2	Pinzade mesa	U13260
2	Varillas de soporte, 1000 mm	U15004
1	Varillas de soporte, 470 mm	U15002
4	Nuez universal	U13255
1	3B NET*log*™	U11300
1	3B NET*lab*™ para Windows	U11310

1 PC con Windows 98/2000/XP, Internet Explorer 6 o más actual, con conexión USB

MONTAJE

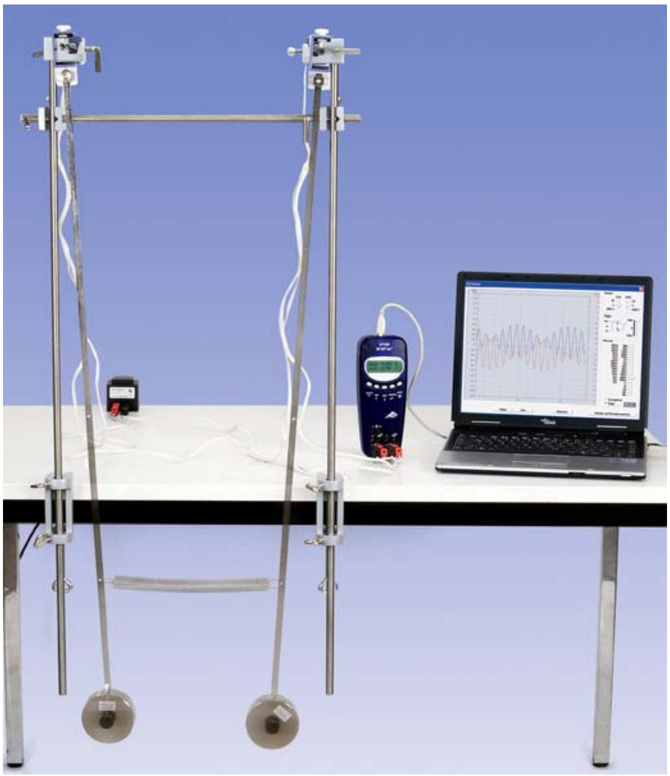

Fig. 2 Montaje para el registro y la evaluación de las oscilaciones de dos péndulos acoplados iguales

El montaje se representa en la Fig. 2.

- Utilizando pinzas de mesa se fijan en el borde la mesa de trabajo dos varillas soporte de 1000 mm de longitud a una distancia entre sí de aprox. 15 cm,.
- Con una varilla soporte corta se acoplan horizontalmente las dos varillas largas, para darle más estabilidad el sistema.
- Por medio de nueces universales se fija un captador de ángulo en el extremo superior de cada una de las varillas soporte verticales.
- Se fija una masa pendular en el extremo inferior de cada una de las varillas pendulares verticales.

- Se cuelgan las varillas pendulares en los captadores de ángulo (para las espigas de la suspensión del péndulo se tienen muescas en cada una de las barras de los captadores de ángulo).
- Se acopla el muelle helicoidal en los orificios de las varillas pendulares que se encuentran a una distancia de aprox. 40 cm del punto de suspensión.
- Se conectan los cables de conexión de los captadores de ángulo con el transformador, se utilizan para ello los cables con la rotulación 12V“.
- Se conecta el 3B NET*log*™ con el PC.
- Teniendo en cuenta la polaridad se conectan ambos captadores de ángulo en las entradas de tensión del 3B NET*log*™ (rojo: Polo “+“, negro: Polo “-“).

EJECUCIÓN

- Se conecta el 3B NET*log*™ y se pone en marcha el programa de PC “3B NET*lab*™ .“
- Seleccione “Laboratorio de mediciones“ e instale un nuevo juego de datos.
- Seleccione las entradas analógicas A y B y ajuste en cada una de ellas el alcance de medida de 2 V en el modo de tensión continua (Vdc).
- Ajuste los siguientes parámetros de medida: Frecuencia: 50 Hz, Número de valores de medida: 600, Modo: Standard.

1. Registro de las oscilaciones en fase:

- Ambos péndulo se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) en la misma dirección y luego se dejan libres al mismo tiempo.
- Se pone en marcha la toma de datos en el 3B NET*lab*™ .
- Después de concluir la toma de datos se selecciona “retornar“ y se guarda la medición bajo un nombre explicativo.

2. Registro de las oscilaciones en contrafase:

- Ambos péndulos se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) pero en direcciones contrarias la una de la otra y se dejan libres al mismo tiempo.
- Se vuelve a poner en marcha la toma de datos en el 3B NET*lab*™.
- Después de concluir la toma de datos se selecciona “retornar“ se guarda la medición bajo un nuevo nombre explicativo.

3. Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos:

- Seleccione “Cambiar ajustes“ y aumente el número de valores de medida hasta 1200.
- Una varilla pendular se desvía de la posición de reposo y la otra se mantiene en la posición de reposos y luego se dejan libres al mismo tiempo.
- Se vuelve a poner en marcha la toma de datos en el 3B NET*lab*™.
- Después de concluir la toma de datos se selecciona “retornar“ y se guarda la medición bajo un nuevo nombre explicativo.

EJEMPLO DE MEDICIÓN

1. Registro de las oscilaciones en fase

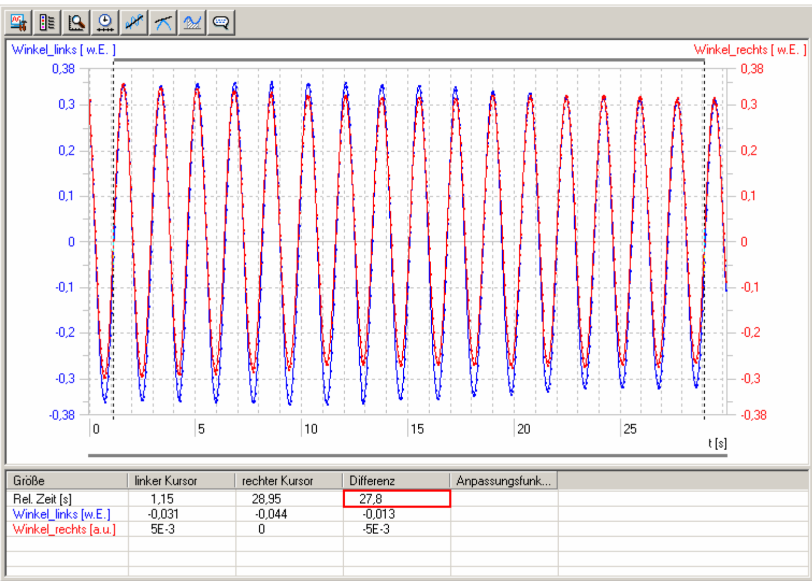

Fig. 3 Diagrama de la desviación con el tiempo de las oscilaciones acopladas en fase (azul: péndulo izquierdo; rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada.

2. Oscilaciones acopladas en contrafase

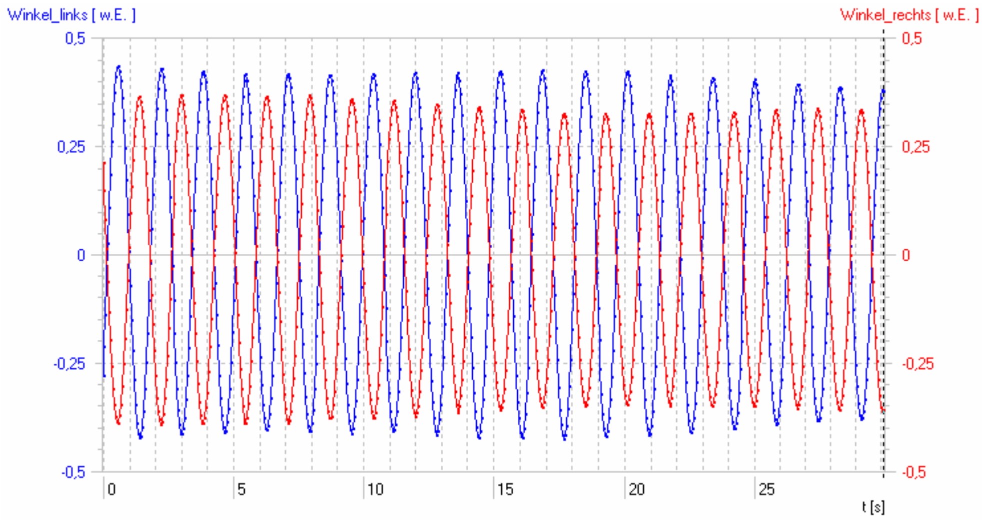

Fig. 4 Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas en contrafase (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada.

3. Oscilaciones acopladas con batidos máximos

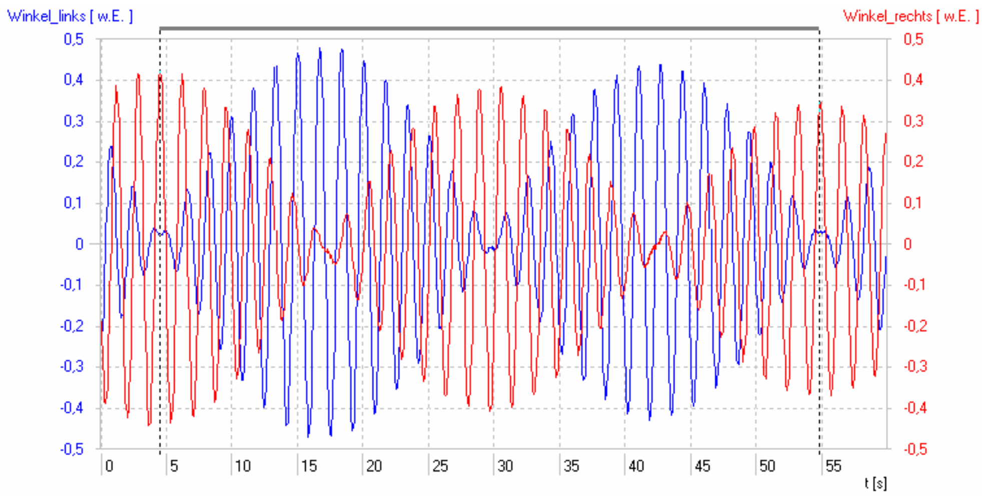

Fig. 5 Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas con batidos máximos (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular on está calibrada.

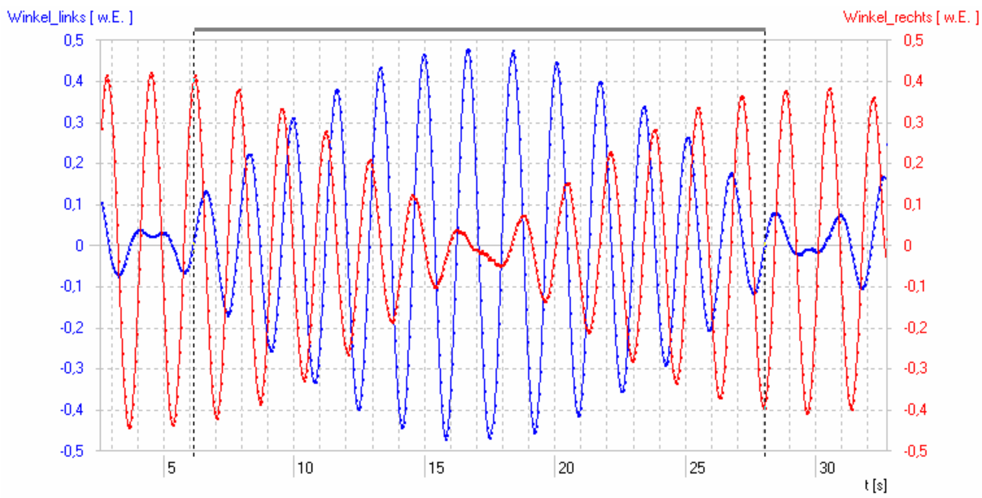

Fig. 6: Representación aumentada de un período de batidos de oscilaciones acopladas con batidos máximos (azul: péndulo izquierdo, rojo: péndulo derecho). La escala angular no está calibrada

EVALUACIÓN

1. Determinación del período de oscilaciones acopladas en fase

- Se abre el juego de datos de las oscilaciones acopladas en fase.
- En el diagrama se incluyen en medio de los cursores un número grande de oscilaciones, para ello, se coloca cada uno de ellos en el paso por cero de un flanco positivo para que se encierre un número completo de períodos (ver. Fig. 3).
- En la tabla por debajo del diagrama se lee la distancia en el tiempo de los dos cursores (Fig. 3, recuadro rojo).

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_+ = \frac{27{,}8\ \mathrm{s}}{16} = 1{,}737\ s$$

2. Determinación del período de las oscilaciones acopladas en contrafase

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas en contrafase y se procede de la misma forma.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_- = 1{,}629\ s$$

3. Determinación del período de las oscilaciones acopladas con batidos máximos

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas con batidos máximos.
- Con los dos cursores se encierra un y si es posible varios períodos de batidos (ver Fig. 5) y se lee la distancia temporal en la parte inferior del diagrama

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de los batidos

$$T_\Delta = 25\ s$$

- Se cambia la escala del eje de los tiempos para representar en la pantalla un período de batido.
- Se encierran con los dos cursores el mayor número posible de períodos de oscilación de un péndulo dentro de un período de batido (el tiempo entre dos pasos por cero de la oscilación en la posición de reposo) y se lee por debajo del diagrama la distancia temporal entre los dos cursores.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T = 1{,}685\ s$$

4. Comparación de los períodos de oscilación y de batido con los valores calculados en base a los períodos de las oscilaciones propias:

Para el período T de las oscilaciones acopladas con batidos máximos se tiene (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1{,}681\ s \tag{9}$$

Este valor se compara con el valor medido de T = 1,685 s .

En forma similar se calcula el período de los batidos T_Δ. Sin embargo es necesario tener en cuenta que éste normalmente se define como el tiempo entre dos detenciones secuenciales en la posición de reposo. Éste corresponde a la mitad del período del término de coseno que modula resp. el termino de seno en (7).

$$T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26\ s \tag{10}$$

Este valor se compara con el valor de medida de $T_\Delta = 25\ s$.

La desviación de aprox. 1 segundo en el valor de medida puede a primera vista parecer muy grande, pero se justifica por la dependencia sensible de la diferencia de los períodos de las oscilaciones propias. Una fluctuación de 4 milisegundos, la cual está dentro de la máxima exactitud de medida que se puede lograr en este experimento, conduce a un cambio en el período de los batidos de aprox. 1 segundo.

5. Determinación de la constante del muelle de acoplamiento

La constante del muelle de acoplamiento D de la constante de acoplamiento k, como se indica a continuación

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{11}$$

(d: Distancia entre el punto de fijación del muelle de acoplamiento y el punto de suspensión del péndulo).

Con un acoplamiento debil (k << g) la constante del muelle tiene sólo una influencia muy debil sobre el período de la oscilación en contrafase, pero una fuerte influencia sobre el período de los batidos. Por lo tanto para determinar la constante del muelle se debe utilizar la relación con el período de batidos, la cual se obtiene cuando se introduce (4) en (8) y se despeja k.

$$k = 2 \cdot L \cdot \left(\omega_\Delta^2 - \omega_\Delta \cdot \omega_+\right) \tag{12}$$

Las frecuencias angulares se expresan por medio de los períodos de oscilación y se sustituye en (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_\Delta} + \frac{{T_+}^2}{{T_\Delta}^2}\right) = 3{,}5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{13}$$