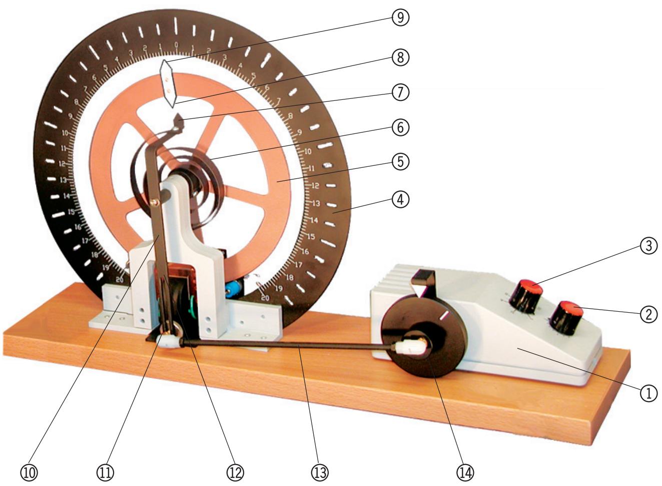
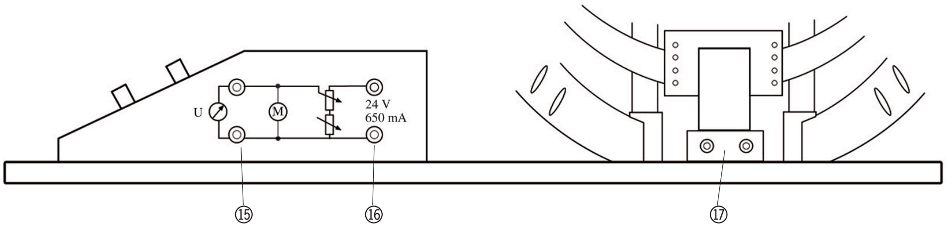
Pendule tournant d'après Prof. Pohl 1002956

Instructions d'utilisation

06/18 ALF



1. Moteur excitateur
2. Bouton tournant pour le réglage fin de la tension d'excitation
3. Bouton tournant pour le réglage grossier de la tension d'excitation
4. Bague graduée
5. Corps du pendule
6. Ressort conique
7. Pointeur indiquant la phase de l'excitateur
8. Pointeur indiquant la phase du corps du pendule
9. Pointeur indiquant la déviation du corps du pendule
10. Excitateur
11. Frein à courants de Foucault
12. Fente de guidage et vis pour le réglage de l'amplitude d'excitation
13. Barre de traction
14. Roue d'entraînement à excentrique
15. Douilles de sécurité de 4 mm pour la mesure de la tension d'excitation
16. Douilles de sécurité de 4 mm pour l'alimentation du moteur excitateur
17. Douilles de sécurité de 4 mm pour l'alimentation du frein à courants de Foucault



Le pendule tournant sert à l'analyse d'oscillations libres, forcées et chaotiques en présence de différents amortissements.

Thèmes des expériences :

- Libres oscillations tournantes avec différents amortissements (oscillations avec amortissement modéré, oscillation apériodique et cas limite apériodique)
- Oscillations forcées et ses courbes de résonance avec différents amortissements
- Déphasage entre l'excitateur et le résonateur en cas de résonance
- Oscillations tournantes chaotiques
- Détermination statique de la grandeur directionnelle D
- Détermination dynamique du moment d'inertie J

1. Consignes de sécurité

- Lorsque vous retirez le pendule de l'emballage, ne le saisissez pas à hauteur de la bague graduée ! Risque d'endommagement ! Retirez-le toujours en saisissant l'emballage intérieur.
- Pour porter le pendule, tenez toujours l'appareil par la plaque de base.
- Ne pas dépasser la tension d'alimentation maximum admissible du moteur excitateur de 24 V CC.
- Ne pas exposer le pendule à des charges mécaniques inutiles.

2. Description, caractéristiques techniques

Le pendule tournant d'après Prof. Pohl est constitué d'un système oscillant monté sur une plaque de base en bois et d'un moteur électrique. Le système oscillant est constitué d'une roue en cuivre (5) montée sur un roulement à billes qui est reliée à la barre de l'excitateur par un ressort spiral (6) fournissant le couple de rappel. Le pendule est excité par un moteur à courant continu à vitesse réglage (réglages grossier et fin) qui, par l'action d'un excentrique (14) à barre de

traction (13), étire et comprime régulièrement le ressort spiral et fait ainsi osciller la roue en cuivre. Un frein électromagnétique à courants de Foucault (11) est utilisé pour l'amortissement. Une bague graduée (4) à fentes et graduation en pas de 2 mm entoure le système oscillant ; l'excitateur et le résonateur sont pourvus de pointeurs.
L'appareil peut aussi être utilisé en démonstration pour la projection d'ombres.

Fréquence propre :	env. 0,5 Hz.
Fréquence d'excitateur :	0 à 1,3 Hz (réglable en continu)
Connexions :	
Moteur :	max. 24 V CC, 0,7 A, douilles de sécurité de 4 mm
Frein à courants de Foucault :	0 à 20 V CC, max. 2 A, douilles de sécurité de 4 mm
Bague graduée :	Ø 300 mm
Dimensions :	400 mm x 140 mm x 270 mm
Masse :	4 kg

2.1 Matériel fourni

1 pendule tournant
2 masses supplémentaires de 10 g
2 masses supplémentaires de 20 g

3. Notions théoriques

3.1 Symboles utilisés dans les formules

D	=	grandeur directionnelle angulaire
J	=	moment d'inertie de masse
M	=	couple de rappel
T	=	durée d'une période
T_0	=	durée d'une période du système non amorti
T_d	=	durée d'une période du système amorti
$\widehat{M}_E$	=	amplitude du couple de l'excitateur
b	=	couple d'amortissement
n	=	nombre de périodes
t	=	temps
Λ	=	décrément logarithmique
δ	=	constante d'amortissement
φ	=	angle de déviation
$\widehat{\varphi}_0$	=	amplitude au temps t = 0 s
$\widehat{\varphi}_n$	=	amplitude après n périodes
$\widehat{\varphi}_E$	=	amplitude de l'excitateur
$\widehat{\varphi}_S$	=	amplitude du système
ω_0	=	propre fréquence du système oscillant
ω_d	=	propre fréquence du système amorti
ω_E	=	fréquence angulaire de l'excitateur
$\omega_{E\ res}$	=	fréquence angulaire de l'excitateur pour l'amplitude max.
Ψ_{0S}	=	angle de phase nulle du système

3.2 Oscillation tournante harmonique

Une oscillation est harmonique lorsque la force de rappel est proportionnelle à la déviation. En présence d'oscillations tournantes harmoniques, le couple de rappel est proportionnel à l'angle de déviation φ:

$$M = D \cdot \varphi$$

Le facteur de proportionnalité D (grandeur directionnelle angulaire) peut être déterminé en mesurant l'angle de déviation et le couple déviant.
D'après la mesure de la durée d'une période T, la fréquence angulaire propre du système ω_0 résulte de l'équation suivante :

$$\omega_0 = 2\,\pi/T$$

et le moment d'inertie de masse de l'équation suivante :

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

3.3 Oscillation tournante amortie libre

En présence d'un système oscillant où de l'énergie est perdue suite à des pertes dues aux frottements, sans qu'elle ne soit compensée par de l'énergie apportée de l'extérieur, l'amplitude diminue continuellement, c'est-à-dire que l'oscillation est amortie.
Le couple d'amortissement b est proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.
L'équation suivante du mouvement résulte de l'équilibre du couple :

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Si l'oscillation n'est pas amortie, b = 0.
Si l'oscillation commence au moment t = 0 s avec une amplitude maximale $\widehat{\varphi}_0$, on obtient l'équation différentielle avec un amortissement pas trop élevé ($\delta^2 < \omega_0^2$) (cas d'oscillation)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

δ = b/2 J représente la constante d'amortissement et

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

la propre fréquence du système amorti.
Si l'amortissement est élevé ($\delta^2 > \omega_0^2$) le système n'oscille plus, mais rampe en position de repos (cas de rampement).
Lorsque l'amortissement n'est pas trop important, la durée T_d d'une période du système oscillant amorti ne se modifie que légèrement par rapport à T_0 du système oscillant non amorti.
En remplaçant $t = n \cdot T_d$ dans l'équation

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

et pour l'amplitude après n périodes $\varphi = \widehat{\varphi}_n$, on obtient avec l'équation $\omega_d = 2\,\pi/T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta \cdot T_d}$$

et ainsi le décrément logarithmique Λ:

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0}\right] = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

En remplaçant $\delta = \Lambda / T_d$, $\omega_0 = 2\pi / T_0$ et $\omega_d = 2\pi / T_d$ dans l'équation

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

on obtient :

$$T_d = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

ce qui permet de calculer avec précision la durée d'une période T_d, dans la mesure où l'on connaît T_0.

3.4 Oscillation tournante forcée

En présence d'oscillations tournantes forcées, un couple modifiable périodiquement par une fonction sinusoïdale agit de l'extérieur sur le système oscillant. Ce couple d'excitation doit être complété dans l'équation de mouvement

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_E \cdot sin(\omega_E \cdot t)$$

Après une certaine période transitoire, le pendule tournant oscille dans un état stationnaire à la même fréquence angulaire que l'excitateur, ω_E pouvant encore être déphasé par rapport à ω_0. Ψ_{0S} représente l'angle de phase nulle du système, le déphasage entre le système oscillant et l'excitateur.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_S \cdot \sin(\omega_E \cdot t - \Psi_{0S})$$

Pour l'amplitude du système $\widehat{\varphi}_S$, on a l'équation suivante :

$$\widehat{\varphi} = \frac{\frac{\widehat{M}_E}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

Pour le rapport entre l'amplitude du système et celle de l'excitateur, on a l'équation suivante :

$$\frac{\widehat{\varphi}_S}{\widehat{\varphi}_E} = \frac{\frac{\widehat{M}_E}{J}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}$$

En cas de résonance ($\omega_E = \omega_0$), si les oscillations ne sont pas amorties, l'amplitude augmente théoriquement jusqu'à l'infini et entraîne une « catastrophe de résonance ».
Si les oscillations sont amorties et l'amortissement pas trop important, l'amplitude du système est maximale, la fréquence angulaire de l'excitateur $\omega_{E\,res}$ étant inférieure à la fréquence angulaire propre du système.

Cette fréquence résulte de

$$\omega_{Eres} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Si l'amortissement est trop important, l'amplitude n'augmente pas.
L'équation suviante s'applique à l'angle de phase nulle du système Ψ_{0S} :

$$\Psi_{0S} = arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_\omega^2}\right)$$

Si $\omega_E = \omega_0$ (résonance), l'angle de phase nulle du système $\Psi_{0S} = 90°$. Ceci s'applique également pour $\delta = 0$ avec un passage correspondant à la limite.
Avec des oscillations amorties ($\delta > 0$) et $\omega_E < \omega_0$, on obtient $0° \leq \Psi_{0S} \leq 90°$, avec $\omega_E > \omega_0$ on obtient $90° \leq \Psi_{0S} \leq 180°$.
Avec des oscillations amorties ($\delta = 0$), $\Psi_{0S} = 0°$ à $\omega_E < \omega_0$ et $\Psi_{0S} = 180°$ à $\omega_E > \omega_0$.

4. Manipulation

4.1 Oscillation tournante amortie libre

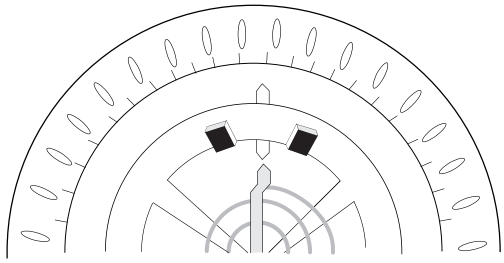
- Relier le frein à courants de Foucault à la sortie de tension réglable de l'alimentation du pendule tournant.
- Connecter l'ampèremètre au circuit électrique.
- Déterminer la constante d'amortissement en fonction du courant.

4.2 Oscillation tournante forcée

- Relier les douilles de connexion (16) du moteur excitateur à la sortie de tension fixe de l'alimentation du pendule tournant.
- Relier le voltmètre aux douilles de connexion (15) du moteur excitateur.
- Déterminer l'amplitude de l'oscillation en fonction de la fréquence de l'excitateur et de la tension d'alimentation.
- Au besoin, relier le frein à courants de Foucault à la sortie destinée à la tension réglable de l'alimentation du pendule tournant.

4.3 Oscillations chaotiques

- Pour générer des oscillations chaotiques, on peut utiliser les 4 masses supplémentaires qui permettent de modifier le couple de rappel linéaire du pendule tournant.
- Visser pour cela la masse au corps du pendule (5).



5. Exemples d'expériences

5.1 Oscillation tournante amortie libre

- Pour définir le décrément logarithmique Λ, mesurer et déterminer les amplitudes en plusieurs passages. Pour cela, au cours de deux séries de mesures, lire les déviations du pendule tournant sur la graduation à gauche et à droite.
- Le point de départ du corps du pendule était 15 ou –15 sur la graduation. Cinq déviations ont été lues.
- A partir du rapport des amplitudes, on obtient Λ à l'aide de la formule suivante :

$$\Lambda = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

n	$\widehat{\varphi}$ –				$\widehat{\varphi}$ +			
0	–15	–15	–15	–15	15	15	15	15
1	–14,8	–14,8	–14,8	–14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	–14,4	–14,6	–14,4	–14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	–14,2	–14,4	–14,0	–14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	–13,8	–14,0	–13,6	–14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	–13,6	–13,8	–13,4	–13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	ø $\widehat{\varphi}$ –	ø $\widehat{\varphi}$ +	Λ –	Λ +
0	–15	15		
1	–14,8	14,8	0,013	0,013
2	–14,5	14,5	0,02	0,02
3	–14,2	14,1	0,021	0,028
4	–13,8	13,8	0,028	0,022
5	–13,6	13,5	0,015	0,022

- La valeur déterminée pour Λ est Λ = 0,0202.
- Pour la durée d'oscillation T du pendule, $t = n \cdot T$. Pour cela, mesurer avec un chronomètre la durée de 10 oscillations et calculer T.

  $T = 1{,}9$ s
- Ces valeurs permettent de déterminer la constante d'amortissement δ avec δ = Λ / T.

  $\delta = 0{,}0106\ s^{-1}$
- Pour la fréquence propre ω, on a l'équation

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$\omega = 3{,}307$ Hz

5.2 Oscillation tournante amortie libre

- Pour déterminer la constante d'amortissement δ en fonction de l'intensité I par l'électro-aimant, la même expérience a été réalisée avec un frein à courants de Foucault à I = 0,2 A, 0,4 A et 0,6 A.

I = 0,2 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–13,6	–13,8	–13,8	–13,6	–13,7	0,0906
2	–12,6	–12,8	–12,6	–12,4	–12,6	0,13
3	–11,4	–11,8	–11,6	–11,4	–11,5	0,0913
4	–10,4	–10,6	–10,4	–10,4	–10,5	0,0909
5	9,2	–9,6	–9,6	–9,6	–9,5	0,1

- Avec T = 1,9 s et la moyenne Λ = 0,1006, on obtient la constante d'amortissement : δ = 0,053 s^{-1}

I = 0,4 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–11,8	–11,8	–11,6	–11,6	–11,7	0,248
2	–9,2	–9,0	–9,0	–9,2	–9,1	0,25
3	–7,2	–7,2	–7,0	–7,0	–7,1	0,248
4	–5,8	–5,6	–5,4	–5,2	–5,5	0,25
5	–4,2	–4,2	–4,0	–4,0	–4,1	0,29

- Avec T = 1,9 s et la moyenne Λ = 0,257, on obtient la constante d'amortissement : δ = 0,135 s^{-1}

I = 0,6 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–9,2	–9,4	–9,2	–9,2	–9,3	0,478
2	–5,4	–5,2	–5,6	–5,8	–5,5	0,525
3	–3,2	–3,2	–3,2	–3,4	–3,3	0,51
4	–1,6	–1,8	–1,8	–1,8	–1,8	0,606
5	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	0,81

- Avec T = 1,9 s et la moyenne Λ = 0,5858 on obtient la constante d'amortissement : δ = 0,308 s^{-1}

5.3 Oscillation tournante forcée

- Pour déterminer l'amplitude de l'oscillation en fonction de la fréquence de l'excitateur et de la tension d'alimentation, lire la déviation maximale du corps du pendule.

T = 1,9 s

Tension moteur V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- D’après la mesure de la durée d’une période T, la fréquence angulaire propre du système ω_0 résulte de l’équation suivante :

  $\omega_0 = 2\,\pi/T = 3{,}3069$ Hz
- La déviation maximale a lieu avec une tension de moteur de 7,6 V, c’est-à-dire qu’il y a résonance.
- Puis, la même expérience a été réalisée avec un frein à courants de Foucault à I = 0,2 A, 0,4 A et 0,6 A.

I = 0,2 A

Tension moteur V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

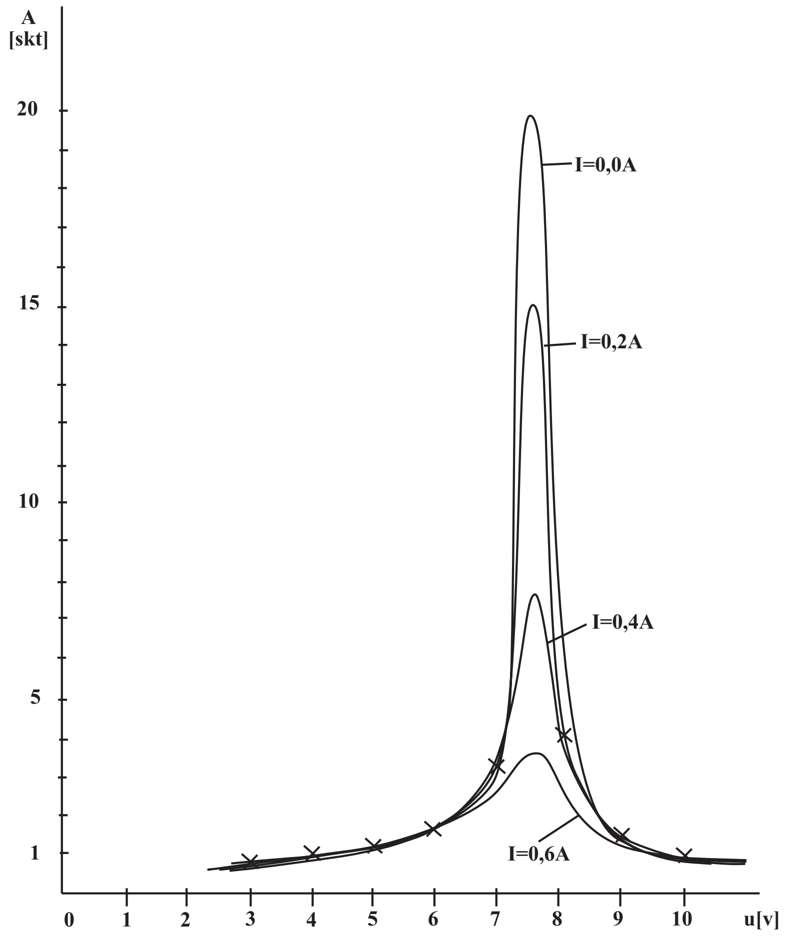
I = 0,4 A

Tension moteur V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

I = 0,6 A

Tension moteur V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- A partir de ces mesures, on peut représenter les courbes de résonance sous forme graphique en reportant les amplitudes en fonction de la tension de moteur.
- La largeur de valeur moyenne du graphe permet de représenter dans un graphique la fréquence de résonance.



Courbes de résonance