Moment d'inertie

DÉTERMINER LE MOMENT D'INERTIE DE DIFFÉRENTS CORPS

- Déterminer la référence angulaire D_r des champs de couplage.
- Déterminer le moment d'inertie J de la barre porte-poids sans masses.
- Déterminer le moment d'inertie J en fonction de l'écart r des masses par rapport à l'axe de rotation.
- Déterminer le moment d'inertie J pour un disque en bois, une bille en bois ainsi d'un cylindre plein et un cylindre creux.
- Confirmation de la règle de Steiner

UE1040205

07/15 UD

Fig. 1 : Ensemble de mesures

NOTIONS DE BASE GENERALES

L'inertie d'un corps rigide par rapport à une modification du mouvement de rotation sur un axe fixe est exprimée par le moment d'inertie *J*. Dépendant de la répartition de la masse dans le corps par rapport à son axe de rotation, il est d'autant plus grand que les écarts par rapport à celui-ci sont importants.

D'une manière générale, le moment d'inertie est défini par le biais de l'intégrale de volume :

$$(1) \quad J = \int_V r_s^2 \, \rho(r) \cdot dV$$

r_s : part de r perpendiculaire à l'axe de rotation

$\rho(r)$: répartition de la masse du corps

Dans l'exemple d'une barre porte-poids, sur laquelle sont disposées symétriquement deux masses m dans un écart r avec l'axe de rotation, le moment d'inertie est le suivant :

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

J_0 : moment d'inertie de la barre porte-poids sans masses

J_m : Moment d'inertie des masses

À présent, on peut fixer les différents corps sur l'axe de torsion. Pour la durée d'oscillation T d'une période :

(3) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$

D_r : référence angulaire du ressort hélicoïdal

C'est-à-dire que la durée d'oscillation T est d'autant plus grande que le moment d'inertie J est important.

À partir de (3), on obtient l'équation permettant de déterminer le moment d'inertie :

(4) $J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$

La référence angulaire du ressort hélicoïdal peut être déterminée à l'aide d'une balance dynamométrique :

(5) $D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$

α : déviation de la position d'équilibre

LISTE DES APPAREILS

1 Axe de torsion	U20050	1008662
1 Barrière photoélectrique	U11365	1000563
1 Compteur numérique	U8533341	1001032/3
1 Socle de serrage, 1000 g	U13265	1002834
1 Socle pour statif, trépied, 185 mm	U13271	1002836
1 Dynamomètre de précision 1 N	U20032	1003104
1 Corps géométriques adaptés à l'axe de torsion	U20051	1008663

MONTAGE ET REALISATION

- Monter les appareils et instruments de mesure comme illustré à la Fig. 1. Positionner l'axe de rotation à l'horizontale au moyen de la nivelle et des vis de réglage situées sur le trépied.
- Raccorder la barrière lumineuse à l'entrée A du compteur numérique. Mettre le bouton de réglage du mode de fonctionnement du compteur numérique sur le symbole pour la mesure des périodes d'un pendule.

Remarques :

- Toujours effectuer le montage expérimental avec une déviation angulaire telle que le ressort spiral soit serré et non pas étiré.
- Au début de l'oscillation, il est recommandé de choisir un écart angulaire de 180°.

Déterminer le coefficient de torsion D_r du ressort spiral de couplage

- Accrocher le dynamomètre à la barre successivement à des distances de r = 5, 10, 15, 20, 25 et 30 cm du centre de l'axe de rotation et choisir un écart angulaire de $\alpha = 180° = \pi$. Veiller à ce que le dynamomètre soit toujours positionné perpendiculairement à la barre.
- Relever les valeurs sur le dynamomètre des différentes forces nécessaires pour chaque écart angulaire par rapport à l'axe de rotation. Noter toutes ces valeurs dans le tableau 1.

Déterminer le moment d'inertie J_0 de la barre de poussée sans les masses

- Faire dévier la barre de poussée sans masses de 180° et et mesurer la durée d'une période T_0 au moyen du compteur numérique.

Déterminer le moment d'inertie J en fonction de la distance r des masses par rapport à l'axe de rotation

- Accrocher les deux masses à la barre de poussée successivement à des distances de r = 5, 10, 15, 20, 25 et 30 cm symétriques à gauche et à droite du centre de l'axe de rotation.
- Ne pas toucher les vis sur les masses qui poussent les butées de billes contre la barre ; ces vis sont réglées de telle sorte que les masses puissent être déplacées et compenser la force centrifuge.
- Faire dévier la barre de poussée de 180°, mesurer la durée d'une période T au moyen du compteur numérique et noter les résultats dans le tableau 2.

Déterminer le moment d'inertie J d'un disque en bois, d'une sphère en bois, d'un cylindre plein et d'un cylindre creux

- Monter les corps solides successivement sur l'axe de rotation. Utiliser le plateau de positionnement pour le cylindre plein et le cylindre creux.
- Afin de procéder à la mesure d'une période, apposer des petites étiquettes en papier sur les corps d'essai.
- Faire tourner successivement le disque en bois et la sphère en bois de 180° et mesurer à chaque fois la durée d'une période. Noter les résultats dans le tableau 3. S'aider des marquages blancs sur les corps solides pour le réglage de l'écart angulaire.
- Faire dévier le plateau de positionnement de 180° et mesurer la durée d'une période. Noter les résultats dans le tableau 3.
- Faire dévier successivement le cylindre plein et le cylindre creux de 180° sur le plateau et mesurer à chaque fois la durée d'une période. Noter les résultats dans le tableau 3. S'aider des marquages blancs sur les corps solides pour le réglage de l'écart angulaire.

Confirmation de la règle de Steiner

- Fixer le boulon successivement dans les perforations à des distances a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 et 14 cm en partant du centre du disque.
- Monter le disque pour les différentes positions du boulon sur l'axe de rotation, faire dévier à chaque fois de 180° et mesurer la durée d'une période. Pour cela, apposer une étiquette en papier sur le disque. Noter les résultats dans le tableau 4.

EXEMPLE DE MESURE

Déterminer le coefficient de torsion D_r du ressort spiral de couplage

Tab. 1 : Valeurs mesurées pour la force *F* à une distance *r* du centre de l'axe de rotation en présence d'une déviation angulaire statique de la barre de poussée de $\alpha = 180° = \pi$.

r / m	*F* / N
0,05	1,72
0,10	0,86
0,15	0,58
0,20	0,46
0,25	0,32
0,30	0,26

Déterminer le moment d'inertie J_0 de la barre de poussée sans masses

Durée d'une période T_0 : 2460 ms

Déterminer le moment d'inertie *J* en fonction de la distance *r* des masses par rapport à l'axe de rotation

Tab. 2 : Période *T* pour des oscillations de la barre de poussée avec des masses fixées à une distance *r* de l'axe de rotation.

r / m	*T* / ms
0,05	2825
0,10	3663
0,15	4740
0,20	5926
0,25	7170
0,30	8440

Déterminer le moment d'inertie *J* d'un disque en bois, d'une sphère en bois, d'un cylindre plein et d'un cylindre creux

Tab. 3 : Durée d'une période *T* pour les oscillations de différents corps solides.

Corps solide	*T* / ms
Disque	1800
Sphère	1880
Plateau de positionnement	512
Cylindre plein + plateau	917
Cylindre creux + plateau	1171

Confirmation de la règle de Steiner

Tab. 4 : Durée de la période *T* pour les oscillations du disque tournant autour de différents axes à une distance *a* du centre de masse.

a / cm	*T* / ms
0	2922
2	2960
4	3121
6	3327
8	3622
10	3948
12	4359
14	4748

ÉVALUATION

Déterminer le coefficient de torsion D_r du ressort spiral de couplage

D'après (5), on obtient :

(6) $F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r}$ avec $C = \alpha \cdot D_r$

- Reporter les résultats des mesures des forces *F* du tableau 1 dans une courbe avec les valeurs inverses des distances 1/*r* et tracer une droite passant par ces points.

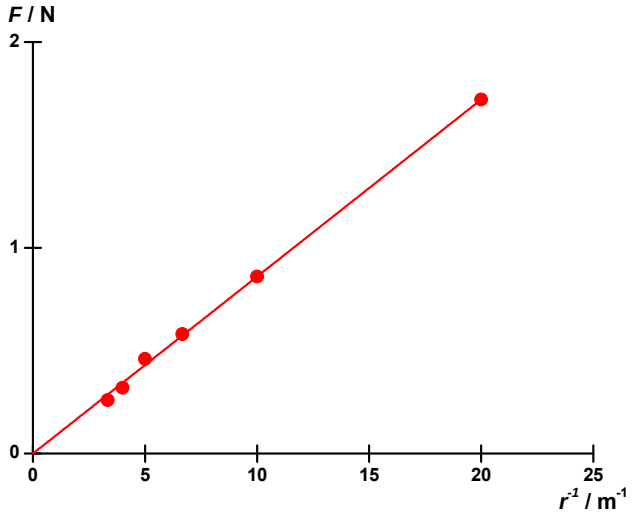

Fig. 2 : La force *F* en fonction de la valeur inverse de la distance des masses 1/*r*.

- Déterminer le coefficient de torsion *D*r à partir de la pente de la droite à l'aide de l'équation (6) :

(7) $C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0{,}0860\ \text{Nm}}{\pi} = 0{,}0274\ \text{Nm}$.

Déterminer le moment d'inertie J_0 de la barre de poussée sans masses

Le moment d'inertie J_0 de la barre de poussée sans masses est donné par l'équation (4) :

$$(8)\quad J_0 = 0{,}0274\ \text{Nm} \cdot \frac{(2{,}460\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 4{,}20 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 .$$

Déterminer le moment d'inertie J en fonction de la distance r des masses par rapport à l'axe de rotation

- Calculer le moment d'inertie J de la barre de poussée munie de masses avec l'équation (4) en prenant les valeurs contenues dans le tableau 2 et noter le résultat dans le tableau 5.
- Calculer le moment d'inertie J_m des masses d'après

  $$(9)\quad J_m = J - J_0$$

  et noter le résultat dans le tableau 5.

Tab. 5 : Période T, moment d'inertie J de la barre de poussée avec masses et moment d'inertie J_m des masses pour différentes distances r par rapport à l'axe de rotation.

r / m	T / s	J / 10^{-3} kg·m²	J_m / 10^{-3} kg·m²
0,05	2,825	5,54	1,34
0,10	3,663	9,31	5,11
0,15	4,740	15,6	11,4
0,20	5,926	24,4	20,2
0,25	7,170	35,7	31,5
0,30	8,440	49,4	45m2

D'après (2), on a :

$$(10)\quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Reporter les moments d'inertie J_m du tableau 5 dans un diagramme avec les carrés des écarts r^2 puis confirmer la dépendance linéaire dans (10) (voir Fig. 3).

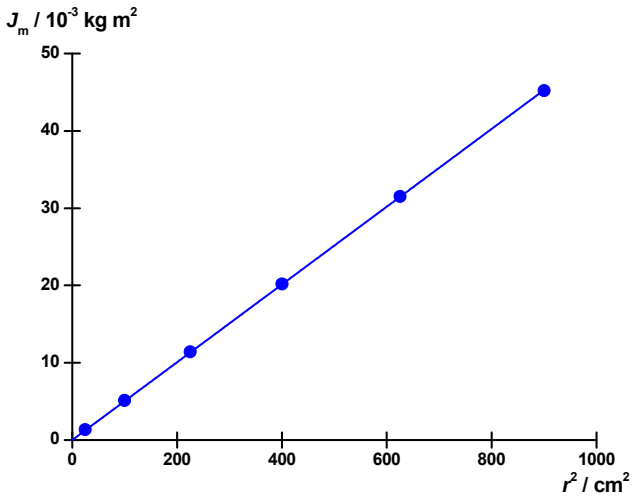

Fig. 3 : Moment d'inertie J_m des masses en fonction du carré de l'écart des masses r.

Déterminer le moment d'inertie J d'un disque en bois, d'une sphère en bois, d'un cylindre plein et d'un cylindre creux

- Calculer les moments d'inertie J des différents corps solides avec l'aide de l'équation (4) en prenant les valeurs contenues dans le tableau 3 et noter les résultats dans le tableau 6.
- Pour déterminer les moments d'inertie du cylindre plein et du cylindre creux J_V et J_H, soustraire respectivement le moment d'inertie du plateau de positionnement J_T des valeurs des moments d'inertie du cylindre plein + plateau de positionnement et du cylindre creux + plateau de positionnement J_{VT} et J_{HT} :

  $$(11)\quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned} .$$

- Calculer les moments d'inertie théoriques J_{th} au moyen des données en annexe, noter les résultats dans le tableau 6 et les comparer avec celles obtenues par les mesures.

Tab. 6 : Moments d'inertie J pour différents corps solides

Corps solide	T / s	J / 10^{-3} kg·m²	J_{th} / 10^{-3} kg·m²
Disque	1,800	2,25	$^1/_2 \cdot m \cdot r^2$ = 2,57
Sphère	1,880	2,45	$^2/_5 \cdot m \cdot r^2$ = 2,54
Plateau de positionnement	0,512	0,18	–
Cylindre plein + plateau	0,917	0,58	–
Cylindre plein	–	0,40	$^1/_2 \cdot m \cdot r^2$ = 0,43
Cylindre creux + plateau	1,171	0,95	–
Cylindre creux	–	0,77	$m \cdot r^2$ = 0,86

Les valeurs obtenues à partir des mesures coïncident bien avec les valeurs théoriques.

Confirmation de la règle de Steiner

- Calculer les moments d'inertie J_a pour les différentes distances a avec l'aide de l'équation (4) en prenant les valeurs contenues dans le tableau 4 et noter les résultats dans le tableau 7.

Tab. 7 : Moment d'inertie J_a du disque en oscillation autour de différents axes à une distance a de son centre de masse.

a / cm	T / s	J_a / 10^{-3} kg·m²
0	2,922	5,93
2	2,960	6,08
4	3,121	6,76
6	3,327	7,68
8	3,622	9,11
10	3,948	10,8
12	4,359	13,2
14	4,748	15,6

- D'après la règle de Steiner, on a :

  (12) $J_a = J_0 + m \cdot a^2$ avec $J_0 = J_a(a = 0)$

- Reporter $J_a - J_0$ et a^2 dans une courbe et confirmer la relation de dépendance linéaire dans (12) et dans le même temps la règle de Steiner (Fig. 4).

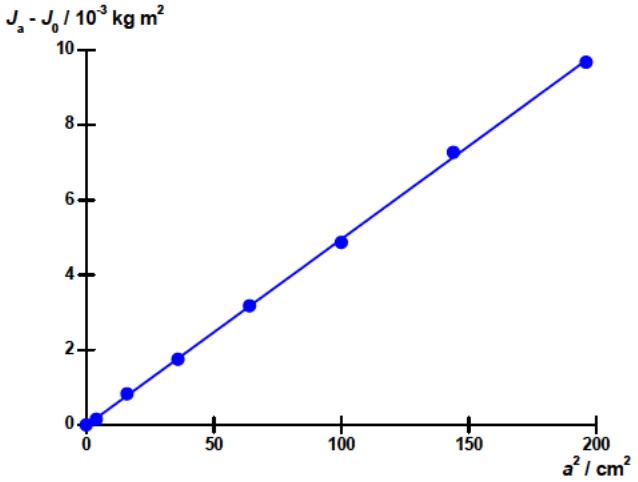

Fig. 4 : Différence des moments d'inertie J_a – J_0 du disque en fonction de la distance a de l'axe d'oscillation par rapport au centre de masse.

ANNEXE : CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES

Barre de poussée

Longueur :	620 mm
Poids :	env. 135 g
Poids des échantillons :	260 g chacun

Disque

Diamètre :	320 mm
Poids :	env . 495 g
Alésages :	8
Ecart des alésages :	20 mm

Sphère en bois

Diamètre :	146 mm
Poids :	env. 1190 g

Disque en bois

Diamètre :	220 mm
Hauteur :	15 mm
Poids :	env. 425 g

Plateau de positionnement

Diamètre :	100 mm
Poids :	env. 122 g

Cylindre plein (en bois)

Diamètre :	90 mm
Hauteur :	90 mm
Poids :	env. 425 g

Cylindre creux métallique

Diamètre extérieur :	90 mm
Hauteur :	90 mm
Poids :	env. 425 g

© Copyright 2015 3B Scientific GmbH