PHYSICS EXPERIMENT

Oscillations couplées

ENREGISTREMENT ET EVALUATION DES OSCILLATIONS DE DEUX PENDULES IDENTIQUES COUPLES.

- Enregistrement de l'oscillation en phase et détermination de la période d'oscillation T_+.
- Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase et détermination de la période d'oscillation T_-.
- Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum et détermination de sa période d'oscillation T ainsi que de la période de battement T_Δ.
- Comparaison de la période de battement et de la période d'oscillation avec les valeurs calculées à partir des périodes d'oscillation propre T_- et T_+.
- Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.

UE1050600

06/24 CW/UD

NOTIONS DES BASE GÉNÉRALES

Lorsque deux pendules couplés oscillent, de l'énergie est va et vient entre les deux pendules. Si les deux pendules sont identiques et que leurs oscillations sont excitées de telle manière que l'un des pendules se trouve au départ en position de repos alors que l'autre pendule est élongé au maximum, le transfert d'énergie est même intégral. C'est-à-dire qu'un pendule est entièrement au repos, tandis que l'autre oscille avec une amplitude maximale. La durée entre les deux arrêts d'un pendule ou, d'une manière générale, entre deux moments où le pendule oscille avec une amplitude minimale, est la période de battement T_Δ.

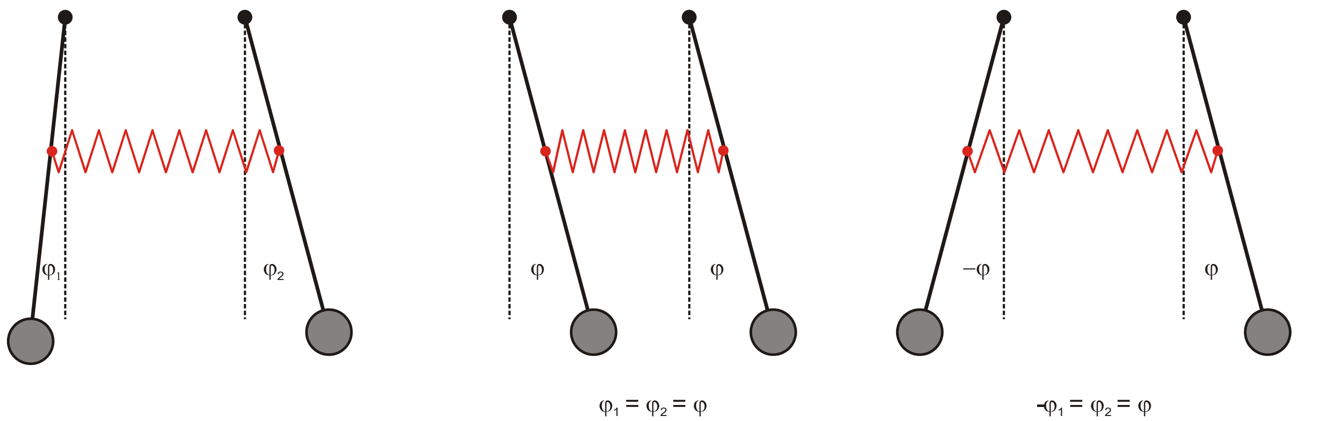
Les oscillations entre deux pendules mathématiques identiques couplés peuvent être décrites comme superposition de deux oscillations propres. On peut observer ces oscillations propres en excitant les deux pendules à des oscillations en phase ou en opposition de phase. Dans le premier cas, les pendules sans influence du couplage oscillent à la fréquence des pendules non couplés, dans le second cas, sous l'influence maximale du couplage, ils oscillent à la fréquence propre maximale. Toutes les autres oscillations peuvent être représentées comme des superpositions de ces deux oscillations propres.

On obtient pour le mouvement des pendules l'équation suivante (pour petits angles d'élongation φ_1 et φ_2) :

$$\begin{aligned} L\cdot\ddot{\varphi}_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ L\cdot\ddot{\varphi}_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

g : accélération de la pesanteur, L : longueur du pendule, k : constante de couplage

Fig. 1: A gauche : oscillation couplée générale. Au milieu : oscillation couplée en phase. A droite : oscillation couplée en opposition de phase



La constante de rappel du ressort de couplage D est fonction de la constante de couplage k suivant l'équation :

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{2}$$

d : Intervalle entre le point de fixation du ressort de couplage et la suspension du pendule, m : Masse du pendule

Pour les grandeurs auxiliaires $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ et $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ (arbitraires dans un premier temps), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Leurs solutions

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{4}$$

avec les fréquences angulaires

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \tag{5}$$

et les durées d'oscillation

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g + 2k}} \tag{6}$$

correspondent aux oscillations propres décrites en cas d'excitation en phase ou en opposition de phase ($\varphi_+ = 0$ en phase et $\varphi_- = 0$ en opposition de phase).

Les déviations des pendules peuvent être calculées à partir de la somme ou la différence des deux grandeurs auxiliaires. On obtient la solution :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)\right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Dans un premier temps, les paramètres a_+, a_-, b_+ et b_- sont des grandeurs quelconques qui peuvent être calculées depuis l'état d'oscillation des deux pendules au moment $t = 0$.

Le cas suivant qui consiste à tirer sur le pendule 1 avec un angle φ_0 au temps 0 et à partir de la position zéro et à le relâcher ensuite, pendant que le pendule 2 se trouve à l'état d'équilibre à la position zéro, est le plus facile à interpréter :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Après la conversion mathématique, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad \omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \tag{10}$$

et

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-}, \quad T_\Delta = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}. \tag{11}$$

Cela correspond à une oscillation des deux pendules avec la même fréquence angulaire ω, leurs amplitudes étant modulées avec la fréquence angulaire ω_Δ. On désigne une telle modulation sous le terme de battement. Dans le cas présenté ici, on peut même parler de battement maximum parce que la valeur minimum atteinte par 'amplitude est zéro.

Comme on entend habituellement par la période de battement T_Δ la durée s'écoulant entre deux arrêts des pendules, on définit :

$$\omega_\Delta = \frac{2\pi}{2T_\Delta} \Leftrightarrow T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{12}$$

LISTE DES APPAREILS

2 Pendules avec capteur d'angle @230 V 1000763 (U8404275-230)

ou

2 Pendules avec capteur d'angle @115 V 1000762 (U8404275-115)

1 Ressort cylindrique 3,9 N/m	1002945 (U15027)
2 Etaux de fixation	1002832 (U1326)
2 Tiges statif, 1000 mm	1002936 (U15004)
1 Tige statif, 470 mm	1002934 (U15002)
4 Noix universelles	1002830 (U13255)
2 Adaptateurs BNC / douilles 4 mm	1002750 (U11259)
2 Capteurs de tension 10 V	1021682 (UCMA-BT02)
1 Enregistreur de données	
1 Logiciel	

De plus amples informations sur la mesure numérique sont disponibles sur le site web du produit dans la boutique en ligne 3B.

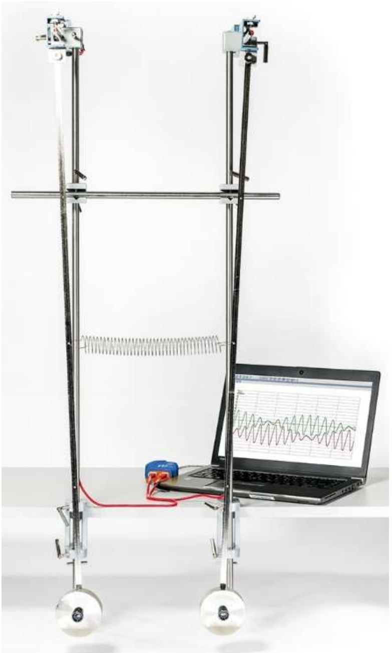


Fig. 2: Montage pour l'enregistrement et l'analyse des oscillations de deux pendules couplés identiques

MONTAGE

Le montage est illustré sur la Fig. 2.

- Fixer les tiges statif longues sur le plan de travail à un intervalle d'env.15 cm à l'aide de pinces-étaux.
- Fixer la tige statif courte à l'horizontale pour mieux stabiliser le montage.
- Fixer le capteur d’angle à l'extrémité supérieure des barres de support verticales à l'aide de manchons universels.
- Fixer les masses à l'extrémité inférieure des barres de pendule.
- Accrocher les barres de pendule sur les capteurs d’angle (des encoches sont prévues dans les tiges des capteurs d'angle pour les aiguilles du dispositif de suspension du pendule).
- Accrocher les ressorts à boudin dans les trous au milieu de chaque tige de pendule (à 50 cm de leurs extrémités).
- Enficher les adaptateurs BNC / douilles 4 mm sur les capteurs d’angle et raccorder les capteurs de tension.
- Connecter les capteurs de tension à l'enregistreur de données.
- Raccorder les deux capteurs d’angle au réseau électrique à l'aide des blocs d'alimentation.

REALISATION

- Lancer le logiciel et enregistrer les courbes temporelles des signaux de tension des deux capteurs.

1. Enregistrement de l'oscillation équiphase

- Tirer sur les deux pendules dans la même direction et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.

2. Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase

- Tirer sur les deux pendules dans la direction opposée et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.

3. Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum

- Le cas échéant, augmenter le nombre de valeurs mesurées.
- Tirer sur une barre de pendule et maintenir l'autre en position zéro, puis relâcher les deux en même temps.

EXEMPLES DE MESURE

1. Oscillation couplée équiphase

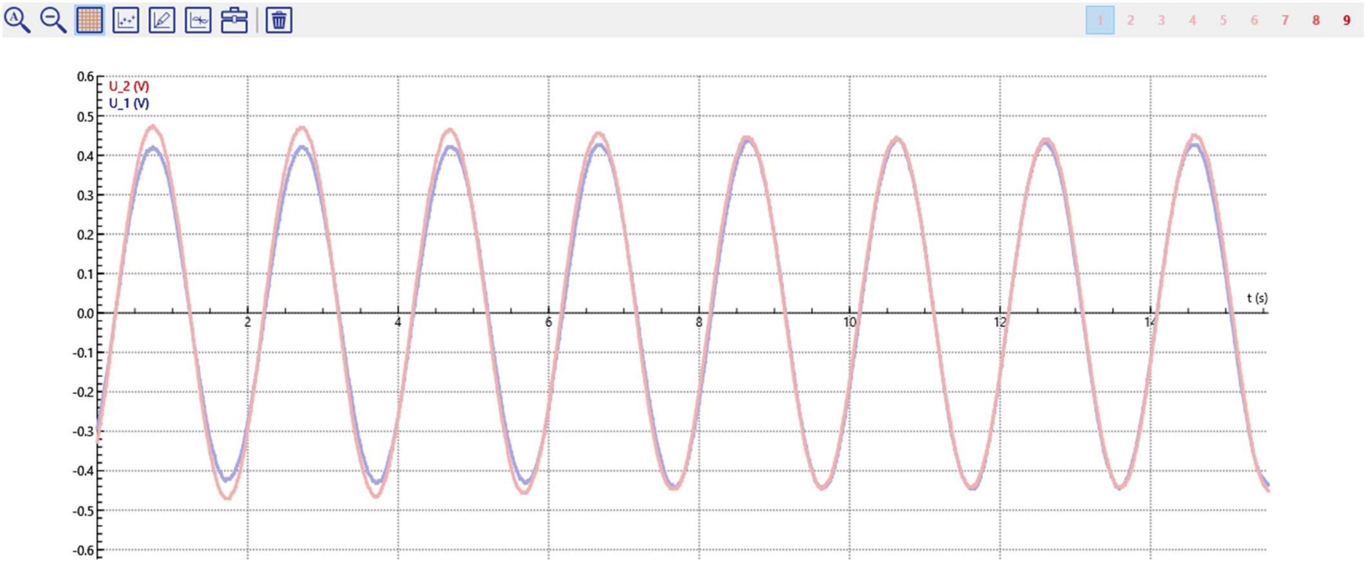


Fig. 3: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée équiphase

2. Oscillation couplée en opposition de phase

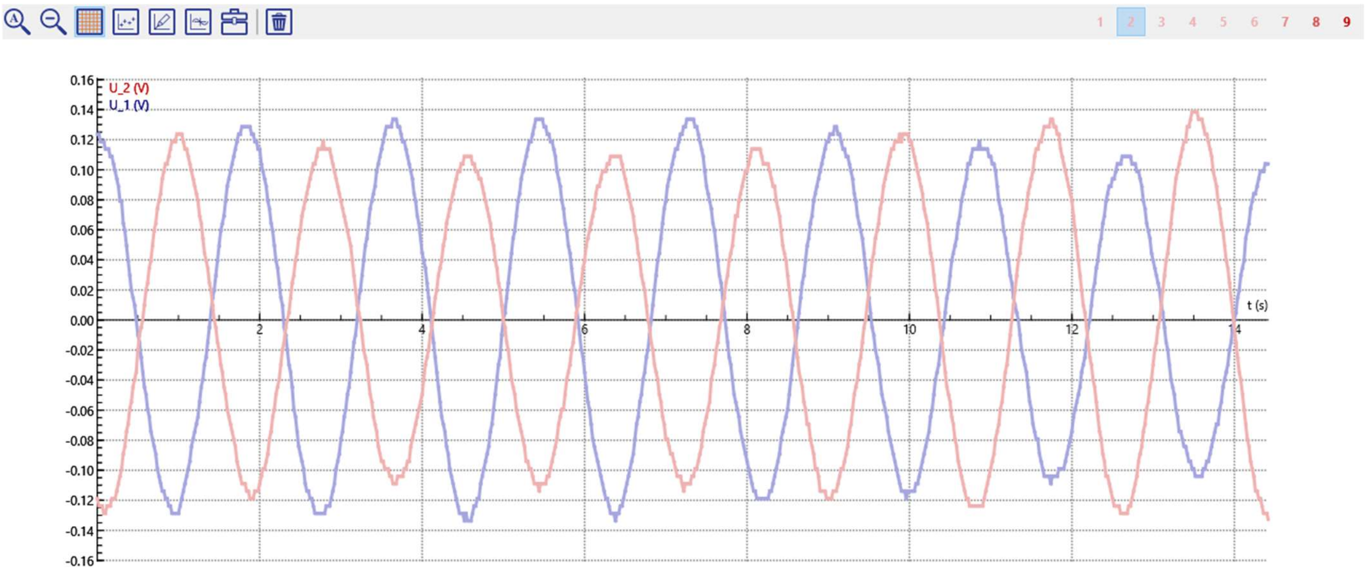


Fig. 4: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée en opposition de phase

3. Oscillation couplée avec battement maximum

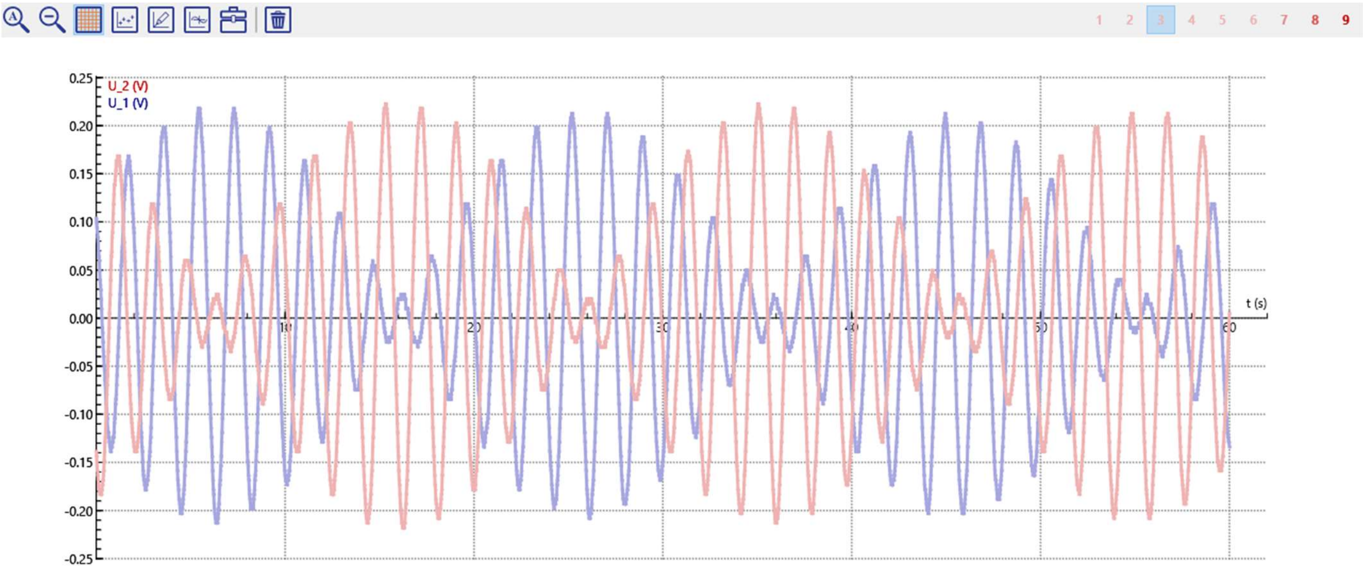


Fig. 5: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée avec battement maximum

EVALUATION

1. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée équiphase

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation équiphase (Fig. 3).
- Entourer sur le diagramme le plus grand nombre de périodes d'oscillations d'un pendule au moyen de curseurs ; ce faisant, placer exactement chacun des deux curseurs sur le passage au point zéro d'un flanc montant pour permettre l'inclusion d'un nombre important de périodes.
- Lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T_+ = \frac{13{,}80\ \text{s}}{7} = 1{,}97\ \text{s}.$$

2. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée en opposition de phase

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation en opposition de phase et procéder de la même façon (Fig. 4).

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T_- = \frac{12{,}50\ \text{s}}{7} 1{,}79\ \text{s}.$$

3. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée avec battement maximum

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation avec battement maximum (Fig. 5).
- Entourer une ou, si possible, plusieurs périodes d'oscillation à l'aide des curseurs et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période de battement incluses donne la période de battement

$T_\Delta = 19{,}72$ s.

- Modifier la graduation de la base de temps de manière à agrandir la représentation d'une période de battement.
- A l'aide des curseurs, entourer sur le diagramme le plus grand nombre possible de périodes d'oscillation d'un pendule à l'intérieur d'une période de battement (temps s'écoulant entre deux immobilisations du pendule en position de repos) et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T = \frac{19{,}72\ \text{s}}{11} 1{,}79\ \text{s}.$$

4. Comparaison avec la théorie

Avec la longueur du pendule L = 0,995 m (distance entre la masse du pendule et la suspension du pendule), la distance entre le point de fixation du ressort de couplage et la suspension du pendule d = 0,535 m, la masse de pendule m = 1 kg, la constante de rappel du ressort de couplage D = 3,9 N/m et l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s², on obtient à partir des équations (2) et (6) :

k = 1,122 m/s²

T_+ = 2,00 s

T_- = 1,81 s

Les valeurs déterminées expérimentalement T_+ = 1,97 s et T_- = 1,79 s sont à comparer à ces valeurs. Si on les remplace dans les équations (11) et (12), on obtient :

T = 1,88 s

T_Δ = 19,59 s

Les valeurs déterminées expérimentalement T = 1,79 s et T_Δ = 19,72 s sont à comparer à ces valeurs.

Les valeurs déterminées expérimentalement correspondent bien à la théorie, les écarts relatifs sont de l'ordre de pourcentages à un chiffre et ne dépassent pas 5%.

5. Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.

Pour un couplage faible ($k << g$), la constante de rappel (2) n'a que peu d'influence sur la période d'oscillation de l'oscillation en opposition de phase mais, par contre, une grande influence sur la période de battement. Pour calculer la constante de rappel, il est donc recommandé d'établir une relation avec la période de battement, relation que l'on obtient en intégrant l'équation (5) dans l'équation (10) pour obtenir l'inconnue k dans l'équation ci-dessous.

$$k = 2 \cdot L \cdot \left(\omega_\Delta^2 - \omega_\Delta \cdot \omega_+\right) \tag{13}$$

On exprime à présent les pulsations par les périodes d'oscillation et on les intègre dans l'équation (2).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_\Delta} + \frac{T_+^2}{T_\Delta^2}\right) = 3{,}6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{14}$$

La valeur s'écarte d'environ 8% de la valeur nominale de 3,9 N/m.